

## CONVECTION LAMINAIRE ETABLIE D'UN GAZ DANS UN MICROCANAL PLAN VERTICAL

Jacques PADET<sup>1</sup>, Renato M. COTTA<sup>2</sup>

*Dans des publications antérieures, nous avons examiné le cas particulier de la convection mixte établie dans un canal plan vertical, pour lequel des solutions analytiques sont disponibles. Ceci a permis en particulier de proposer des critères de transition entre convection forcée, mixte et naturelle, ainsi que d'évaluer la production d'entropie de flottabilité, d'entropie visqueuse et d'entropie thermique dans l'écoulement. Dans le présent article, l'étude est étendue au cas d'un microcanal, où les conditions aux limites dynamiques et thermiques sont différentes du cas macroscopique.*

*In previous papers, we have analysed a special case of mixed thermal convection, so called fully developed flow, in vertical plane and annular channels, for which analytical solutions are available. It can be shown that they permit to define transition criteria from forced convection to mixed and natural convection, as so buoyancy, viscous and thermal entropy production. In the present paper, this study is extended to microchannels, where dynamic and thermal boundary conditions are different.*

**Mots clés :** microcanal / convection mixte / recirculation / production d'entropie

### 1. Introduction : cas général

Dans les nombreuses publications consacrées à la convection, la convection mixte occupe une place mineure par rapport à la convection forcée et à la convection naturelle, tout particulièrement en ce qui concerne les microcanaux. Pourtant, ces deux situations extrêmes ne sont en fait que les deux cas limites de la convection mixte, dans lesquelles les forces gravitationnelles sont, soit négligeables devant les forces de pression, soit prépondérantes.

Pour aborder cette question sous un aspect fondamental, nous choisissons de considérer un écoulement laminaire anisotherme entre deux plaques planes verticales et parallèles, respectivement placées en  $y = 0$  et  $y = e$ , dont les températures  $T_1$  et  $T_2$  sont imposées et uniformes (fig. 1). Le fluide est isochore, et l'écoulement globalement ascendant, avec une vitesse moyenne (débitante)  $V_m$ .

Les conditions d'entrée et de sortie sont reportées à l'infini. Les champs de vitesse et de température sont donc indépendants de la coordonnée verticale  $x$

<sup>1</sup> Prof. Émérite, ITheMM, Université de Reims, France, jacques.padet@univ-reims.fr

<sup>2</sup> Prof. LabMEMS, Université Fédérale de Rio de Janeiro, Brasil, e-mail : cotta@abc.org.br

(régimes dynamique et thermique établis). En particulier, le gradient de pression motrice  $dp^*/dx$  est une constante.

Cette configuration a été étudiée en particulier dans [1] et [2]. Nous en rappelons ici l'essentiel, dans le cas classique (macroscopique).

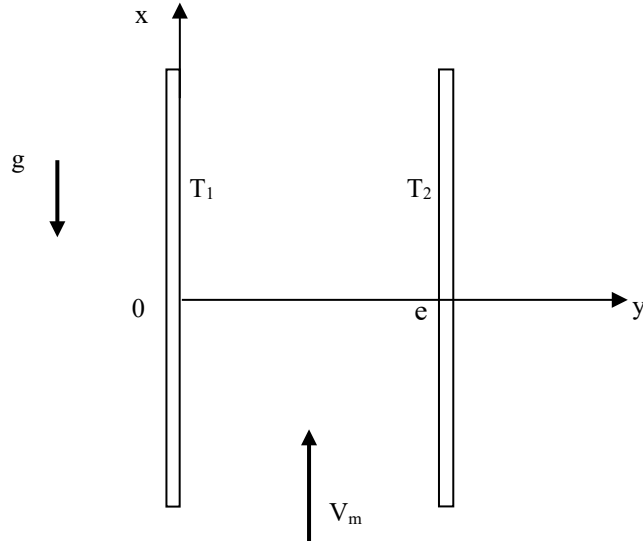


Fig. 1 – Ecoulement plan établi ;  $T_1 - T_2 = \Delta T > 0$ .

Une conséquence de l'équation de continuité est que la composante  $V$  de la vitesse (selon la direction  $y$ ) est nulle partout. En adoptant l'approximation de Boussinesq (pour laquelle  $T_{ref}$  est la température de référence), les équations de quantité de mouvement et d'énergie se réduisent alors à :

$$0 = g\beta(T - T_{ref}) - \frac{1}{\rho} \frac{dp^*}{dx} + \nu \frac{d^2 U}{dy^2} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (2)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} y = 0 : T = T_1 ; U = 0 \\ y = e : T = T_2 ; U = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

La solution est donc purement conductive pour le champ de température :

$$T = -\frac{T_1 - T_2}{e} y + T_1 \quad (4)$$

et le champ de vitesse est décrit par un polynôme de degré 3 :

$$U = \frac{g\beta}{6\nu e} (T_1 - T_2) y^3 - \left( \frac{g\beta}{4\nu} (T_1 - T_2) - \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \right) y^2 + \left( \frac{g\beta}{12\nu} (T_1 - T_2) - \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \right) ey \quad (5)$$

On en déduit la vitesse débitante :

$$V_m = -\frac{e^2}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} \quad (6)$$

Il est à noter que cette vitesse est nulle en convection naturelle pure : le débit ascendant du côté de la paroi chaude est égal au débit descendant du côté froid.

## 2. Cas d'un microcanal

### 2.1. - Bases théoriques

Lorsque le libre parcours moyen des molécules dans le fluide devient significatif par rapport à la largeur du canal (en pratique, ceci se produit essentiellement dans les gaz), on observe au voisinage des parois un saut de vitesse (accommodation dynamique) et un saut de température (accommodation thermique). Dans ce cas, le conduit est qualifié de *microcanal* [3,4,5].

Les paramètres caractéristiques du problème sont :

- le libre parcours moyen  $\lambda_m$
- le coefficient d'accommodation dynamique  $\sigma_V$
- le coefficient d'accommodation thermique  $\sigma_T$
- le coefficient de la loi isentropique  $\gamma$  ( $= 1,4$  pour un gaz diatomique)

$$\text{- le nombre de Knudsen } Kn = \frac{\lambda_m}{e} \quad (7)$$

On pose :

$$\beta_V = \frac{2 - \sigma_V}{\sigma_V} \quad ; \quad \beta_T = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \quad (8)$$

Les conditions aux limites qui remplacent (3) sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} y = 0 : T &= T_1 + \beta_T \lambda_m \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=0} ; U = \beta_V \lambda_m \left( \frac{dU}{dy} \right)_{y=0} \\ y = e : T &= T_2 - \beta_T \lambda_m \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=e} ; U = -\beta_V \lambda_m \left( \frac{dU}{dy} \right)_{y=e} \end{aligned} \quad (9)$$

Elles sont applicables si le nombre de Knudsen satisfait la condition :

$$0,001 < Kn < 0,1 \quad (10)$$

Alors, les équations (1) et (2) restent valables, mais doivent être résolues avec les conditions aux limites (9).

### 2.2. - Champ de température

L'intégration de (2) donne :

$$\frac{dT}{dy} = A = cte = \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \left( \frac{dT}{dy} \right)_{y=e} \quad (11a)$$

$$T = A y + B \quad (11b)$$

Les conditions aux limites (9) déterminent les constantes  $A$  et  $B$ . En introduisant le nombre de Knudsen (7), on obtient :

$$A = -\frac{T_1 - T_2}{e(1+2\beta_T Kn)} \quad ; \quad B = \frac{(1+\beta_T Kn)T_1 + \beta_T Kn T_2}{1+2\beta_T Kn} \quad (12)$$

En particulier, le flux de chaleur entre les deux parois est :

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dy} = -\lambda A \quad (13)$$

Cette valeur est évidemment plus faible que dans un macrocanal, où elle est égale à  $\lambda(T_1 - T_2)/e$ .

### 2.3. - *Champ de vitesse*

Avant d'intégrer l'équation (1), il faut préciser la *température de référence*  $T_{ref}$  qui devra être utilisée (en relation avec l'approximation de Boussinesq). D'après [2], c'est ici la température moyenne du fluide, soit :

$$T_{ref} = \frac{1}{e} \int_0^e T(y) dy = A \frac{e}{2} + B \quad (14)$$

Avec (12), le résultat est :

$$T_{ref} = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (15)$$

La température de référence est donc la même que dans un macrocanal, ceci étant dû à la symétrie des conditions aux limites thermiques sur les deux parois (même valeur de  $\beta_T$ ).

Alors, l'équation dynamique (1) devient :

$$\nu \frac{d^2 U}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp^*}{dx} - g\beta(Ay + B) + g\beta T_{ref} \quad (16)$$

Deux intégrations successives donnent :

$$U = \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx} \frac{y^2}{2} - \frac{g\beta}{\nu} A \frac{y^3}{6} - \frac{g\beta}{\nu} (B - T_{ref}) \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad (17)$$

Introduisons les conditions aux limites dynamiques (9) pour déterminer les constantes :

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad U(0) = C_2 = \beta_V \lambda_m \left( \frac{dU}{dy} \right)_{y=0} \quad (18)$$

$$y = e \quad \Rightarrow \quad U(e) = -\beta_V \lambda_m \left( \frac{dU}{dy} \right)_{y=e}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx} \frac{e^2}{2} - \frac{g\beta}{\nu} A \frac{e^3}{6} - \frac{g\beta}{\nu} (B - T_{ref}) \frac{e^2}{2} + C_1 e + C_2 =$$

$$-\beta_V \lambda_m \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx} e - \frac{g\beta}{\nu} A \frac{e^2}{2} - \frac{g\beta}{\nu} (B - T_{ref}) e + C_1 \right\}$$

Après remplacement de  $C_2$  par (18), tous calculs faits, on obtient :

$$C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} e + \frac{g\beta}{v} A \frac{e^2}{6} \frac{e+3\beta_V \lambda_m}{e+2\beta_V \lambda_m} + \frac{g\beta}{v} (B - T_{ref}) \frac{e}{2} \quad (19)$$

#### 2.4. – Vitesse débitante

La vitesse débitante a maintenant pour expression, d'après (17) et (18) :

$$V_m = \frac{1}{e} \int_0^e U dy = \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx} \frac{e^2}{6} - \frac{g\beta}{v} A \frac{e^3}{24} - \frac{g\beta}{v} (B - T_{ref}) \frac{e^2}{6} + \frac{C_1}{2} (e + 2\beta_V \lambda_m) \quad (20)$$

Il sera commode d'expliciter le paramètre  $B - T_{ref}$ , à partir de (12) et (15) :

$$B - T_{ref} = \frac{(1+\beta_T Kn)T_1 + \beta_T Kn T_2}{1+2\beta_T Kn} - \frac{T_1+T_2}{2} = \frac{T_1-T_2}{2(1+2\beta_T Kn)}$$

$$B - T_{ref} = -A \frac{e}{2} \quad (21)$$

d'où :

$$V_m = \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx} \frac{e^2}{6} + \frac{g\beta}{v} A \frac{e^3}{24} + \frac{C_1}{2} (e + 2\beta_V \lambda_m)$$

$$C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} e + \frac{g\beta}{v} A \left( \frac{e^2}{6} \frac{e+3\beta_V \lambda_m}{e+2\beta_V \lambda_m} - \frac{e^2}{4} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} e - \frac{g\beta}{v} A \frac{e^3}{12(e+2\beta_V \lambda_m)}$$

Introduisons à présent le nombre de Knudsen ( $Kn = \lambda_m/e$ ) dans tous les termes, en prenant en compte l'expression (12) de  $A$  :

$$C_1 = -\frac{e}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} + \frac{g\beta \Delta T}{12 v} \frac{e}{(1+2\beta_T Kn)(1+2\beta_V Kn)} \quad (22)$$

L'expression de la vitesse débitante est finalement :

$$V_m = -\frac{e^2}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} (1 + 6\beta_V Kn) \quad (23)$$

Par rapport à un macrocanal, la correction est exprimée par le terme entre parenthèses, qui est plus grand que 1, et qui ne dépend que du paramètre dynamique. *Donc, pour un même gradient de pression motrice et un même écart de température entre les parois, le débit dans un microcanal est plus élevé que dans un macrocanal, et il est indépendant des paramètres thermiques.*

#### 2.5. – Condition de recirculation

La limite d'apparition d'une recirculation correspond à une dérivée de la vitesse nulle sur la paroi 2, soit d'après (17) :

$$\left( \frac{dU}{dy} \right)_{y=e} = \frac{e}{\mu} \frac{dp^*}{dx} - \frac{g\beta}{v} A \frac{e^2}{2} - \frac{g\beta}{v} (B - T_{ref}) e + C_1 = 0 \quad (24a)$$

et, compte tenu de (21) :

$$\frac{e}{\mu} \frac{dp^*}{dx} + C_1 = 0 \quad (24b)$$

Remplaçons  $C_1$  par (22) ; il vient après simplification :

$$\frac{e}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} + \frac{g\beta \Delta T}{12\nu} \frac{e}{(1+2\beta_T Kn)(1+2\beta_V Kn)} = 0$$

Introduisons enfin  $V_m$  à partir de (23). La condition (24) devient :

$$-\frac{6V_m}{e} \frac{1}{1+6\beta_V Kn} + \frac{g\beta \Delta T}{12\nu} \frac{e}{(1+2\beta_T Kn)(1+2\beta_V Kn)} = 0 \quad (25)$$

Rappelons ici la définition du *coefficient de poussée thermique* :

$$RiRe = \frac{g\beta \Delta T D_h^2}{V_m \nu}$$

avec un diamètre hydraulique  $D_h = 2e$  pour un conduit plan, soit :

$$RiRe = 4e^2 \frac{g\beta \Delta T}{V_m \nu} \quad (26)$$

On voit que la relation (25) est vérifiée pour une valeur critique  $RiRe_{cr}$  du coefficient de poussée thermique :

$$RiRe_{cr} = 288 \frac{(1+2\beta_T Kn)(1+2\beta_V Kn)}{1+6\beta_V Kn} \quad (27)$$

une recirculation apparaissant si  $RiRe > RiRe_{cr}$

Dans un macrocanal ( $Kn \cong 0$ ) on retrouve bien la valeur connue  $RiRe_{cr} = 288$ , cf. [2].

Plus généralement, puisque les conditions propres à un microcanal conduisent à augmenter la vitesse moyenne d'un facteur  $(1 + 6\beta_V Kn)$  (23), elles réduisent le coefficient  $RiRe$  (26) dans la même proportion.

## 2.6. - Exemples numériques

On observe sur (23) et (27) que les principaux paramètres dynamiques dans un microcanal sont ceux d'un macrocanal, affectés de facteurs correctifs. Il est important de connaître leur ordre de grandeur. Pour cela, considérons l'air à pression ambiante. Une valeur moyenne pour les coefficients d'accommodation est :

$$\sigma_V \cong \sigma_T \cong 0,9$$

De (8) on déduit :

$$\beta_V = 1,22 ; \quad \beta_T = 1,43 \quad (28a)$$

Quant au libre parcours moyen, il vaut :

$$\lambda_m = 68 \text{ nm} \quad (28b)$$

*I<sup>er</sup> cas* : En prenant  $e = 1000 \text{ nm} = 1 \mu\text{m}$ , on a  $Kn = \frac{\lambda_m}{e} = 0,068$ , ce qui est conforme à la condition (10).

- La vitesse débitante est, d'après (23) :

$$V_m = -\frac{e^2}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} (1 + 6\beta_V Kn) = -\frac{e^2}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} (1 + 6 \times 1,22 \times 0,068)$$

$$V_m = -\frac{e^2}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} \times 1,5 \quad (29a)$$

Par rapport à un macrocanal, la vitesse et le débit sont multipliés par 1,5.

- Le flux de chaleur entre les parois est fourni par (13) et (12) :

$$\varphi = -\lambda A = A = \lambda \frac{T_1 - T_2}{e(1+2\beta_T Kn)} \quad (29b)$$

Avec les lois macroscopiques, il vaudrait :

$$\varphi_0 = \lambda \frac{T_1 - T_2}{e}, \text{ d'où : } \varphi = \frac{\varphi_0}{(1+2\beta_T Kn)} = \frac{\varphi_0}{1,195} \quad (29c)$$

Le gradient de température étant plus faible, les effets de flottabilité dans l'écoulement sont atténués.

- La condition de recirculation (27) est ici :

$$RiRe > RiRe_{cr} = 288 \frac{(1+2\beta_T Kn)(1+2\beta_V Kn)}{1+6\beta_V Kn} = 288 \times \frac{1,195 \times 1,166}{1,5}$$

$$RiRe_{cr} = 288 \times 0,93 = 267,5 \quad (30)$$

Les effets de  $\beta_V$  et de  $\beta_T$  se compensent partiellement, mais l'effet de  $\beta_V$  est dominant, et le seuil critique est légèrement abaissé.

2<sup>ème</sup> cas : Avec  $e = 5000 \text{ nm} = 5 \mu\text{m}$ , on a  $Kn = \frac{\lambda_m}{e} = 0,0136$ , toujours en conformité avec la condition (10).

Les résultats sont en particulier :

$$V_m = -\frac{e^2}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} \times 1,1$$

$$RiRe_{cr} = 288 \times 0,975 = 281 \quad (31)$$

En augmentant la largeur du conduit, on diminue le nombre de Knudsen, et on se rapproche naturellement des valeurs relatives à un macrocanal.

### 3. Convection forcée/mixte/naturelle : critère de transition

#### 3.1. – Approche théorique

Pour les écoulements en macrocanaux, nous avons proposé des critères permettant de différencier les trois régimes de convection, forcée, mixte ou naturelle [6, 7]. Deux d'entre eux (sensiblement équivalents) sont basés sur la comparaison des termes de l'équation de quantité de mouvement (16), réécrite ci-dessous :

$$0 = \underbrace{g\beta(Ay + B - T_{ref})}_a - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{dp^*}{dx}}_b + \underbrace{\nu \frac{d^2 U}{dy^2}}_c = \quad (32)$$

Par commodité, ces trois termes ont été désignés par  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

On considérera ici seulement le critère basé sur la comparaison des forces de flottabilité et des forces de pression ( $a$  et  $b$ ). Une comparaison locale, point par point, n'aurait aucune validité générale. La comparaison des moyennes arithmétiques sur la section droite de l'écoulement ne serait pas non plus opérationnelle, puisque  $a$  peut être ici positif, et là négatif. On s'est donc orienté vers une comparaison des moyennes quadratiques  $\overline{a^2}$  et  $\overline{b^2}$  sur l'intervalle  $[0, e]$  :

$$\overline{a^2} = \frac{1}{e} \int_0^e a^2 dy \quad ; \quad \overline{b^2} = \frac{1}{e} \int_0^e b^2 dy \quad (33)$$

Avec (21),  $a$  devient :

$$a = g\beta A \left( y - \frac{e}{2} \right) \quad (34)$$

On a donc :

$$\overline{a^2} = \frac{(g\beta A)^2}{e} \int_0^e \left( y^2 - ey + \frac{e^2}{4} \right) dy = \frac{1}{12} (g\beta Ae)^2$$

et, avec (12) :

$$\overline{a^2} = \frac{(g\beta \Delta T)^2}{12 (1+2 \beta_T Kn)^2} \quad (35)$$

De même, avec (23) :

$$b = -\frac{12 \nu}{e^2} \frac{V_m}{1+6 \beta_V Kn} = cte \quad (36a)$$

$$\overline{b^2} = \frac{144 \nu^2}{e^4} \frac{V_m^2}{(1+6 \beta_V Kn)^2} \quad (36b)$$

Le rapport de (35) et (36b) a été désigné par  $\Gamma^2$  :

$$\Gamma^2 = \frac{\overline{a^2}}{\overline{b^2}} = \frac{1}{1728} \left( \frac{g\beta \Delta T e^2}{V_m \nu} \right)^2 \left( \frac{1+6 \beta_V Kn}{1+2 \beta_T Kn} \right)^2 \quad (37a)$$

En considérant l'expression (26) du coefficient de poussée thermique, on voit que :

$$\Gamma^2 = \frac{RiRe^2}{27648} \left( \frac{1+6 \beta_V Kn}{1+2 \beta_T Kn} \right)^2 \quad (37b)$$

Réciproquement, si on choisit  $\Gamma$ , la valeur correspondante de  $RiRe$  est :

$$RiRe = 166,28 \Gamma \frac{1+2 \beta_T Kn}{1+6 \beta_V Kn} \quad (38)$$

Admettons alors que, en convection forcée, les forces de flottabilité représentent au maximum 5% des forces de pression (soit  $\Gamma < 0,05$ ), ou à l'inverse que, en convection naturelle, les forces de pression ne dépassent pas 5% des forces de flottabilité ( $b < 0,05 a$ , soit  $\Gamma > 20$ ). Avec  $Kn = 0,068$  (§ 2.5, 1<sup>er</sup> cas), on obtient :

$$\begin{aligned} RiRe &< 6,62 \quad \text{pour la convection forcée} \\ RiRe &> 2650 \quad \text{pour la convection naturelle} \\ 6,62 &< RiRe < 2650 \quad \text{pour la convection mixte} \end{aligned} \quad (39)$$



Par rapport aux conditions aux limites d'un écoulement macroscopique,  $RiRe$  est réduit d'un facteur :

$$\frac{1+2 \beta_T Kn}{1+6 \beta_V Kn} = \frac{1,195}{1,5} = 0,8$$

### 3.2. – *Considérations pratiques*

Malheureusement, les valeurs numériques de nombres sans dimension comme  $RiRe$  ne nous renseignent pas sur les ordres de grandeur réels des paramètres physiques. Cette connaissance est pourtant essentielle d'un point de vue pratique.

D'après la littérature, pour un écoulement d'air en microcanal, l'ordre de grandeur de la vitesse débitante est le plus souvent de  $10^{-2}$  à  $10^{-1}$  m/s. Choisissons alors :

$$V_m = 10^{-2} \text{ m/s}$$

Dans un écoulement d'air à 300 K ( $\nu = 1,57 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  ;  $\beta = 1/300$ ), en prenant  $e = 10^{-6} \text{ m}$  (§ 2.6, 1<sup>er</sup> cas) et  $\Delta T = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ , le calcul donne pour le coefficient de poussée thermique :

$$RiRe \cong 10^{-5}$$

*A l'évidence, on est très en dessous de la valeur 6,62 obtenue dans (39) pour le seuil CF-CM. Autrement dit, la circulation du gaz doit être considérée comme un écoulement de convection forcée, où les forces de flottabilité sont négligeables.*

Avec une vitesse de  $10^{-1} \text{ m/s}$ , ou une épaisseur de canal  $e = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  (§ 2.6, 2<sup>ème</sup> cas), rien n'est fondamentalement changé, et cette observation reste valable.

Par contre, pour un espace  $e = 1 \text{ mm}$  (et en conservant  $V_m = 10^{-2} \text{ m/s}$ ),  $RiRe$  est voisin de 10. On est donc à la limite de la convection mixte, et les forces de flottabilité deviennent significatives. Mais alors, le conduit ne peut plus être considéré comme un microcanal.

## 4. Production d'entropie

### 4.1. – *Cas macroscopique*

La production d'entropie dans un écoulement laminaire de convection mixte a été analysée dans [8]. Elle repose sur deux sources : la dissipation visqueuse et la diffusion thermique.

L'entropie visqueuse générée dans une section droite de l'écoulement a pour valeur approchée (en  $W/m^2 \text{ K}$ ) :

$$\sigma_v'' = 1,39 \cdot 10^{-3} \frac{(\rho g \beta \Delta T)^2}{\mu T_m} + 12 \frac{\mu V_m^2}{e T_m} \quad (40)$$

Notons que le dernier terme représente la production d'entropie dans un écoulement isotherme, ou de convection forcée.

Quant à la production d'entropie thermique, elle s'écrit localement (en  $W/m^3 K$ ) :

$$\sigma_{th}''' = \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{dT}{dy} \right)^2 = \frac{\varphi}{T^2} \frac{\Delta T}{e} \quad (41)$$

soit, pour l'ensemble de la section ( $W/m^2 K$ ) :

$$\sigma_{th}'' = \frac{\varphi}{T_m^2} \Delta T \quad (42)$$

#### 4.2. – Adaptation aux microcanaux

##### 4.2.1. – Entropie visqueuse

Compte tenu des conclusions du §.3.2, la production d'entropie visqueuse est celle d'un écoulement de convection forcée, l'entropie de flottabilité étant négligeable. Autrement dit, l'expression (40) se réduit à :

$$\sigma_v'' = 12 \frac{\mu V_m^2}{e T_m} \quad (43)$$

##### 4.2.2. – Entropie thermique

Le taux de production locale d'entropie thermique est donné par la première partie de l'équation (41) :

$$\sigma_{th}''' = \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{dT}{dy} \right)^2$$

Le flux et le gradient de température sont ici donnés par (11), (12) et (13), d'où :

$$\sigma_{th}''' = \frac{\lambda}{T^2} \frac{\Delta T^2}{e^2 (1+2 \beta_T Kn)^2} \quad (44)$$

Sur l'ensemble de la section, la production d'entropie est alors :

$$\sigma_{th}'' = \int_0^e \sigma_{th}'''(y) dy$$

soit, en première approximation, si  $\Delta T/T$  est assez petit :

$$\sigma_{th}'' = \frac{\lambda}{e} \left( \frac{\Delta T}{T_m} \right)^2 \frac{1}{(1+2 \beta_T Kn)^2} \quad (45)$$

Pour faciliter la comparaison avec (42), écrivons :

$$\sigma_{th}'' = \frac{\varphi}{T_m^2} \Delta T \frac{1}{(1+2 \beta_T Kn)^2} \quad (46)$$

On voit que, par rapport au cas macroscopique, la production d'entropie thermique est diminuée d'un facteur  $(1 + 2 \beta_T Kn)^2 = 1,195^2 = 1,43$ .

##### 4.2.3. – Ordres de grandeur

Revenons à l'exemple numérique déjà plusieurs fois considéré. Sachant que pour l'air à 300 K,  $\mu = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  et  $\lambda = 0,025 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , on obtient avec (43) et (45) :

$$\sigma_v'' = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

$$\sigma_{th}'' = 260 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

Il apparait que, dans le cas microscopique, même avec des valeurs différentes de celles qui ont été choisies, la production d'entropie thermique est très supérieure à la production d'entropie visqueuse. Cette dernière est donc négligeable.

## 5. Conclusions

Rappelons tout d'abord le cadre de l'étude : canal plan vertical, écoulement de gaz laminaire et établi, gradient de pression motrice imposé, températures des parois uniformes et imposées. Dans ces conditions, la comparaison entre un macrocanal et un microcanal fait apparaître les propriétés suivantes :

- le gradient de température et la production totale d'entropie sont plus faibles que dans un écoulement de convection mixte macroscopique.
- la vitesse débitante  $V_m$  (et par conséquent le débit) reste indépendante des paramètres thermiques, mais elle est plus élevée dans un microcanal (formule 23). En conséquence, le coefficient de poussée thermique (27) est diminué proportionnellement à  $V_m$ .
- sur les autres paramètres, les accommodations dynamiques et thermiques ont des effets contraires, et se compensent partiellement, cf. (27), (32). Leur influence globale est donc limitée.
- les critères de transition entre convection forcée, mixte et naturelle sont légèrement abaissés. Néanmoins, une recirculation peut se produire dans un microcanal.

Toutefois, cette dernière observation doit être nuancée, car elle reste largement théorique. En effet, compte tenu des valeurs numériques usuelles rencontrées dans les microsystèmes, on peut affirmer que le régime convectif est toujours celui de la convection forcée, sauf arrêt presque complet de la circulation. ***Les forces de flottabilité peuvent donc être négligées dans tous les calculs.***

## NOMENCLATURE

$e$	distance entre les parois, $m$
$g$	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
$Kn$	nombre de Knudsen (définition 7)
$q_v$	débit volumique, $m^3.s^{-1}$
$p^*$	pression motrice, $Pa$ (définie par $\overrightarrow{grad} p^* = \overrightarrow{grad} p - \rho \vec{g}$ )
$Ri$	nombre de Richardson
$Re$	nombre de Reynolds
$RiRe$	coefficient de poussée thermique
$T$	température, $^{\circ}C$ ou $K$

$T_1, T_2$	températures paroi chaude / paroi froide, °C
$\Delta T$	$= T_1 - T_2$
$U$	composante locale de la vitesse dans la direction $x$ , $m.s^{-1}$
$V_m$	vitesse moyenne (débitante), $m.s^{-1}$
$x$	coordonnée verticale, $m$
$y$	coordonnée transversale, $m$
$\beta$	coefficient de dilatation thermique du fluide, $K^{-1}$
$\lambda$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$\mu$	viscosité dynamique du fluide, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\nu$	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$\sigma''$	taux de production d'entropie surfacique, $W.m^{-2}.K^{-1}$

## R E F E R E N C E S

- [1]. *W. Aung, G. Worku.* - Theory of fully developed combined convection including flow reversal. *J. Heat Transfer*, 108, p.485-488, 1986.
- [2]. *J. Padet, R.M. Cotta, E.C. Mladin, C. Padet* – Mixed thermal convection. Fundamentals and analysis of the planar case. *Annals of the Brazilian Academy of Sciences*, 37 (3), p.1865-1895, 2015.
- [3]. *G. Karniadakis, A. Beskok, N. Aluru* – Microflows and nanoflows. Fundamentals and simulation. *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Vol. 29. Springer, 2005.
- [4]. *M. Rebay, S. Kakaç, R.M. Cotta* – Microscale and nanoscale heat transfer. Analysis, design and applications. CRC Press, 2016.
- [5]. *R.M. Cotta, B.C. Knupp, C.P. Naveira-Cotta* – Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems. *Mechanical Engineering Series*, Springer, 2016.
- [6]. *J. Padet, R.M. Cotta, N.C. Chereches, N. El Wakil* - Internal mixed convection : Criteria for transition from natural to forced convection. *Conf. ENCIT 2004*, Rio de Janeiro, Brazil, Ref. CIT04-0841, 2004.
- [7]. *J. Padet* - One-way channels. A physical characterization based on convective scales. *TÜBA-TOBB ETÜ 3d Energy Conf.*, Ankara, Turkey, 2018.
- [8]. *C. Padet, E.C. Mladin, J. Padet, A. Dobrovicescu* – Dissipation visqueuse et production d'entropie dans un écoulement établi de convection mixte. *U.P.B. Sci. Bull., Série D* , Vol. 71, Iss. 2, ISSN 1454-2358, 2009.