

## DISSIPATION VISQUEUSE ET PRODUCTION D'ENTROPIE DANS UN ÉCOULEMENT ÉTABLI DE CONVECTION MIXTE

Colette PADET<sup>1</sup>, Emilia-Cerna MLADIN<sup>2</sup>,  
Jacques PADET<sup>3</sup>, Alexandru DOBROVICESCU<sup>4</sup>

*Studiul consideră problema convecției termice mixte care apare la curgerea dezvoltată a unui fluid între două plăci plane paralele verticale având temperaturi impuse și pentru un gradient de presiune fixat. Se calculează succesiv funcția de disipație viscoasă, apoi producția de entropie datorată transferului termic și frecării viscoase și se arată că există o distanță optimă între plăci pentru care producția totală de entropie este minimă. Rezultatele indică faptul că utilizarea unui criteriu bazat pe entropie pentru diferențierea între regimurile de convecție este mai greu de aplicat decât un criteriu bazat pe fenomenul disipativ.*

*The present study refers to a fully developed thermal mixed convection between two vertical and infinite walls having imposed constant temperatures and for a given flow rate (or pressure gradient). Viscous dissipation and entropy production are successively estimated and then used to find an optimum distance between the plates which minimizes the total entropy production in the flow field. Results indicated that the definition of a entropy criteria to use between different convection regimes is more difficult to apply than a dissipation criteria..*

*L'étude porte sur un écoulement établi de convection mixte laminaire entre deux plaques planes parallèles verticales à températures imposées, le gradient de pression dans l'écoulement (ou la vitesse débitante) étant fixé. On calcule successivement la fonction de dissipation, puis les productions d'entropie thermique et visqueuse, et on montre qu'il existe une distance optimale entre les parois qui minimise la production d'entropie totale. En conclusion, la définition d'un critère entropique de sélection entre les différents régimes de convection apparaît moins intéressante et plus difficile à mettre en œuvre que celle d'un critère dissipatif.*

**Mots clés:** convection mixte / génération d'entropie / distance optimale

### 1. Introduction

Pendant une longue période, les méthodes d'optimisation des systèmes thermiques ont été largement basées sur des critères énergétiques. Cependant, peu à peu, l'intérêt s'est porté sur l'analyse exergetique ou entropique, qui paraissent

<sup>1</sup> Prof., Université de Reims, France

<sup>2</sup> Prof., Chaire de Thermodynamique, Université POLITEHNICA de Bucarest, Roumanie, e-mail : adobrovicescu@yahoo.com

<sup>3</sup> Prof., Université de Reims, France

<sup>4</sup> Prof., Chaire de Thermodynamique, Université POLITEHNICA de Bucarest, Roumanie

l'une et l'autre souvent mieux adaptées à ce qu'il est convenu d'appeler avec le vocabulaire actuel « développement durable ». En particulier, les analyses basées sur la production d'entropie ont été mises en avant par la thermodynamique des processus irréversibles [1]. Mais cette théorie, d'une grande richesse conceptuelle, n'a pas donné dans les sciences de l'ingénieur les bénéfices qui en avaient été escomptés, particulièrement en raison de sa relative complexité et de son manque d'impact pratique. Elle a fort heureusement été relayée, grâce en particulier aux travaux de Bejan [2] par une approche plus simple et plus pragmatique, qui a donné un nouvel essor à des optimisations basées sur la limitation de la production d'entropie. Toutefois, les travaux correspondants ont essentiellement porté sur la convection forcée [3-6], et beaucoup plus rarement sur la convection mixte [7].

D'autre part, et d'une façon indépendante, certains auteurs ont souligné l'intérêt que présenterait une discrimination - basée sur des critères objectifs - entre convection forcée, mixte et naturelle [8]. Les concepts de convection forcée, mixte ou naturelle sont sans doute clairs au départ, mais ne reflètent pas exactement la réalité physique. La convection forcée – associée avec un écoulement impose d'une force de l'extérieure - et la convection naturelle – associée avec le mouvement ascensionnel déterminé par un gradient de température – ne sont que les cas limites de la convection mixte, et dans nombre de situations pratiques on se trouve en régime de convection mixte, même si on décide de l'ignorer. Mais il faut reconnaître que la littérature ne fournit que des indications fragmentaires et assez mal étayées sur les moyens de distinguer ces trois régimes convectifs.

Les deux préoccupations se rejoignent dans le présent travail, qui concerne un écoulement établi de convection mixte entre deux parois verticales à températures imposées. Cette configuration, que l'on pourrait qualifier d'académique, n'est cependant pas dénuée d'intérêt [9,10], même si dans les conditions réelles de fonctionnement on a plutôt affaire à une géométrie annulaire [11]. Les applications concernent l'efficacité et la sécurité de systèmes aussi divers que les centrales thermonucléaires, les groupes de réfrigération ou les forages pétroliers en eau profonde [10].

## **2. Description du problème**

L'objet de notre étude est un écoulement laminaire anisotherme entre deux parois planes verticales, respectivement placées en  $y = 0$  et  $y = e$ , dont les températures  $T_1$  et  $T_2$  sont imposées et uniformes (*figure 1*).

Le fluide est supposé isochore ; l'écoulement est globalement ascendant, de vitesse débitante  $V_d$ , assez faible pour admettre que le mouvement naturel est également significatif. Il s'agit donc des conditions qui caractérisent la convection

mixte. Nous admettrons que l'influence de la dissipation visqueuse sur le champ de température est négligeable (dans les exemples traités, le nombre de Brinkman – produit des nombres de Prandtl et d'Eckert – est de l'ordre de  $10^{-7}$ ). A ces conditions, et en notant  $\Delta T = T_1 - T_2$  l'écart de température entre les deux parois, on montre [12] que le champ de vitesse est unidimensionnel et qu'il a pour expression :

$$U = \frac{g\beta}{6\nu e} \Delta T y^3 - \frac{g\beta}{4\nu} \Delta T y^2 - 6 \frac{V_d}{e^2} y^2 + \frac{g\beta}{12\nu} \Delta T e y + 6 \frac{V_d}{e} y \quad (1)$$

A partir de là, nous allons pouvoir calculer la dissipation et la production d'entropie dans l'écoulement, puis examiner la définition d'un critère de sélection à partir de l'une ou l'autre de ces deux grandeurs.

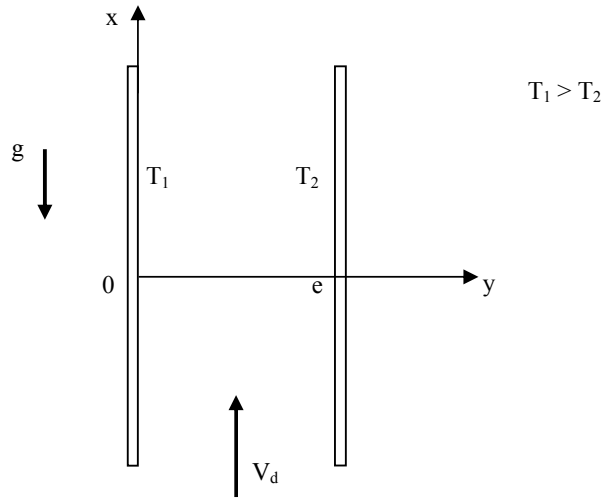


Fig. 1. Écoulement établi de convection mixte entre deux plaques verticales  
Géométrie et coordonnées

### 3. Fonction de dissipation

Nous nous intéresserons d'abord à la puissance locale dissipée du fait de la viscosité, représentée par la fonction de dissipation locale  $\Phi''' [\text{W/m}^3]$  qui s'écrit dans le cas présent [2]:

$$\Phi'''(y) = \mu \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 \quad (2)$$

La puissance totale dissipée dans une section droite de l'écoulement est alors  $\Phi''$  [W/m<sup>2</sup>]:

$$\Phi'' = \mu \int_0^e \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 dy \quad (3)$$

A partir de la relation (1), on obtient :

$$\Phi'' = 1,39.10^{-3} \frac{(\rho g \beta \Delta T)^2 e^3}{\mu} + 12 \mu \frac{V_d^2}{e} \quad (4)$$

Cette expression peut être rendue adimensionnelle en adoptant comme grandeur de référence la puissance  $\Phi''^o$  dissipée dans un écoulement isotherme ( $\Delta T = 0$ ), soit :

$$\Phi''^o = 12 \mu V_d^2 / e \quad (5)$$

d'où la dissipation adimensionnée  $\Phi^+$  :

$$\Phi^+ = \frac{\Phi''}{\Phi''^o} = \frac{1,39.10^{-3}}{12} \frac{(\rho g \beta \Delta T)^2 e^4}{\mu^2 V_d^2} + 1 \quad (6)$$

Le diamètre hydraulique de l'écoulement étant  $2e$ , les nombres de Reynolds et de Richardson s'écrivent respectivement :

$$\text{Re} = \frac{\rho V_d \cdot 2e}{\mu} \quad ; \quad \text{Ri} = \frac{g \beta \Delta T \cdot 2e}{V_d^2} \quad (7)$$

On constate alors que  $\Phi^+$  s'exprime uniquement en fonction du produit  $\text{RiRe}$ , qui est le coefficient de poussée thermique :

$$\Phi^+ = 7,23.10^{-6} (\text{Ri Re})^2 + 1 \quad (8)$$

De plus, les relations (4) ou (8) montrent qu'une dissipation due à la flottabilité (terme en  $\Delta T$ , ou en  $\text{RiRe}$ ) s'ajoute à la dissipation dans l'écoulement isotherme.

#### 4. Production d'entropie

Dans la production d'entropie en convection mixte, on peut distinguer deux sources : la dissipation  $\Phi'' [\text{W/m}^2]_t$  qui produit une « entropie visqueuse »  $\sigma_v'' [\text{W/m}^2\text{K}]$ , et le gradient de température entre les deux parois, qui est à l'origine d'une « entropie thermique »  $\sigma_{th}'' [\text{W/m}^2\text{K}]$ .

En première approximation, pour des écarts de température modérés ( $\Delta T/T < 10\%$ ), la production d'entropie visqueuse peut être exprimée en rapportant la dissipation totale à la température moyenne  $T_m$  (le champ de température étant ici linéaire,  $T_m = (T_l + T_2)/2$  [13]) :

$$\begin{aligned}\sigma_v'' &= \frac{\Phi''}{T_m} \\ &= 1,39 \cdot 10^{-3} \frac{(\rho g \beta \Delta T)^2 e^3}{\mu T_m} + 12 \frac{\mu V_d^2}{e T_m}\end{aligned}\quad (9)$$

La production locale d'entropie thermique,  $\sigma_{th}''' [\text{W/m}^3\text{K}]$ , s'écrit d'autre part :

$$\sigma_{th}'''(y) = \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{dT}{dy} \right)^2 \quad (10)$$

Dans le cas présent, le gradient de température est constant :

$$\frac{dT}{dy} = \frac{\Delta T}{e} \quad (11)$$

d'où une production totale d'entropie thermique dans la section,  $\sigma_{th}'' [W / m^2 K]$  :

$$\sigma_{th}'' = \int_0^e \sigma_{th}'''(y) dy = \lambda \left( \frac{\Delta T}{e} \right)^2 \int_0^e \frac{1}{T^2} dy \quad (12)$$

Nous évaluons également cette grandeur en première approximation, en admettant l'expression suivante :

$$\sigma_{th}'' = \frac{\lambda}{e} \left( \frac{\Delta T}{T_m} \right)^2 \quad (13)$$

Une valeur approchée de la production totale d'entropie  $\sigma_{tot}'' [\text{W/m}^2\text{K}]$  est donc, d'après (9) et (13) :

$$\sigma_{tot}'' = \sigma_v'' + \sigma_{th}'' \quad (14)$$

soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}'' = 1,39 \cdot 10^{-3} \frac{(\rho g \beta \Delta T)^2 e^3}{\mu T_m} + \frac{12 \mu V_d^2}{e T_m} \\ + \frac{\lambda \left( \frac{\Delta T}{T_m} \right)^2}{e} \end{aligned} \quad (15)$$

Sur la figure 2,  $\sigma_{tot}''$  est représentée en fonction de  $e$  pour un écoulement d'eau, et pour trois valeurs de la vitesse compatibles avec un écoulement laminaire. On constate que les courbes sont pratiquement confondues, ce qui indique une très faible influence de  $V_d$

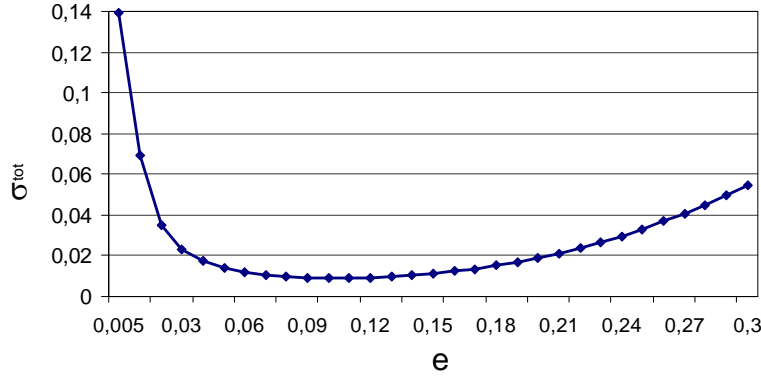


Fig. 2. – Production d'entropie en fonction de  $e$  ; écoulement d'eau.  
 $V_d = 0 ; 0,001 ; 0,007$  m/s ;  $T_m = 293$  K ;  $\Delta T = 10$  K

On représente dans la *figure 3* les trois termes de l'équation (15) pour souligner l'importance de chacun. Il résulte que le deuxième terme est vraiment négligeable et la concurrence de l'influence est entre le premier et le troisième terme. La somme de tous,  $\sigma_{tot}''$ , est au début dominée par l'entropie de flottabilité et ensuite, pour des plus grandes valeurs de  $e$ , elle est dominée par l'entropie thermique.

Il est intéressant de noter que  $\sigma_{tot}''(e)$  présente un minimum pour un écartement  $e_{opt}$  des parois (correspondant à  $\partial \sigma_{tot}'' / \partial e = 0$ ) tel que :

$$e_{opt} = 3,9352 \left[ \mu \frac{12 \mu V_d^2 + \lambda \frac{\Delta T^2}{T_m}}{(\rho g \beta \Delta T)^2} \right]^{1/4} \quad (16)$$

En d'autres termes, il existe une distance optimale entre les parois qui correspond à un minimum de la production d'entropie. Cette propriété résulte du fait que l'entropie thermique est dominante pour les faibles valeurs de  $e$ , et tend vers zéro quand  $e$  augmente, tandis que c'est l'inverse pour l'entropie de flottabilité. Les résultats de la *figure 2* nous ont montré que la dépendance de  $\sigma_{tot}$  avec la vitesse est si faible, qu'on ne peut pas la remarquer sur la plage de valeurs de vitesse débitante pour lesquelles l'écoulement est laminaire. Dans ce cas, si on fait  $V_d = 0$  dans l'équation (16), on voit que la différence de température disparaît, et que la valeur de  $e_{opt}$  est alors seulement fonction de la température moyenne et des propriétés thermophysiques correspondantes, soit :

$$e_{opt} = 3,9352 \left[ \frac{\mu \lambda}{(\rho g \beta)^2 T_m} \right]^{1/4} \quad (17)$$

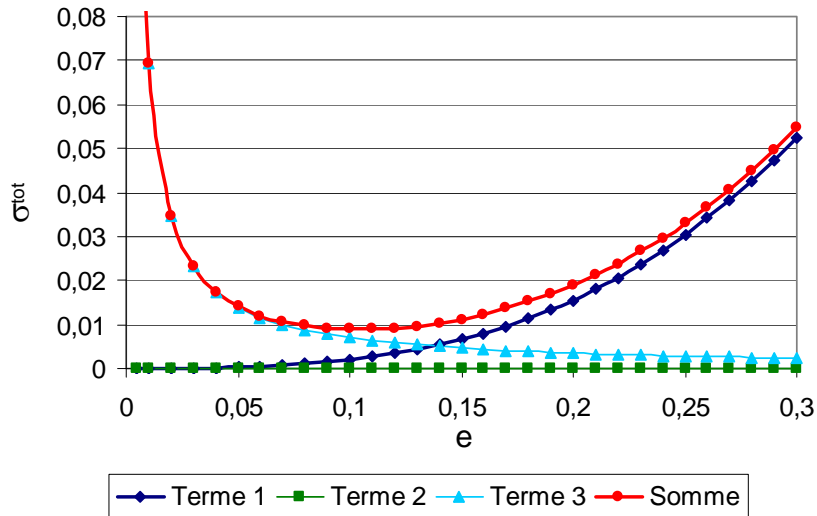


Fig. 3. – Entropie de flottabilité (terme 1), isotherme (terme 2), thermique (terme 3) et totale  
 $T_m = 293 \text{ K}$ ;  $\Delta T = 10 \text{ K}$  ;  $V_d = 0,001 \text{ m/s}$  [eq.(15)]

La figure 4 donne la variation de  $e_{opt}$  en fonction de  $T_m$ . A titre d'exemple, dans un écoulement d'eau à  $T_m = 300 \text{ K}$ , on obtient  $e_{opt} = 8,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

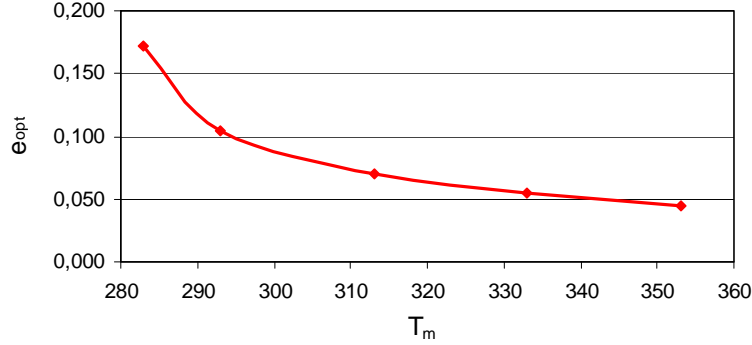


Fig. 4. Courbes  $e_{opt}$  en fonction de la température pour un écoulement laminaire d'eau

## 5. Critères de selection

Dans le cas d'écoulement qui fait l'objet de la présente étude, plusieurs critères objectifs de sélection ont été proposés [8,12,13]. Ils sont basés sur la comparaison des forces en présence. Nous nous proposons d'examiner ici d'autres critères, basés sur la dissipation et sur la production d'entropie.

### 5.1. Critères dissipatifs

Au vu des relations (4) ou (8), il apparaît deux façons de construire un critère de sélection sur la base de l'énergie dissipée : comparer la dissipation de flottabilité (terme en  $\Delta T$  ou en  $RiRe$ ) avec la dissipation dans l'écoulement isotherme, ou bien la comparer à la dissipation totale.

Dans la première option, nous posons :

$$\begin{aligned}\Gamma_d &= \frac{7,23 \cdot 10^{-6} (Ri Re)^2}{1} \\ &= 7,23 \cdot 10^{-6} (Ri Re)^2\end{aligned}\tag{18}$$

Le domaine de variation de ce paramètre est  $[0, +\infty]$ . On peut alors admettre, par exemple, qu'on est en convection forcée si la dissipation de flottabilité est inférieure à 5% de la dissipation isotherme (soit  $\Gamma_d < 0,05$ ), et vice-versa, qu'on est en convection naturelle si la seconde est inférieure à 5% de la première (soit  $\Gamma_d > 20$ ). Ce seuil de 5% est bien évidemment arbitraire, mais il peut raisonnablement être choisi comme convention.

D'après (18), pour une valeur fixée de  $\Gamma_d$ , le coefficient de poussée thermique correspondant est :

$$Ri Re = 372 \sqrt{\Gamma_d}\tag{19}$$



On obtient avec les choix précédents :

$$\begin{aligned} \Gamma_d < 0,05 & \Rightarrow Ri Re < 83 \\ \Gamma_d > 20 & \Rightarrow Ri Re > 1663 \end{aligned}$$

Avec la seconde option, posons :

$$K_d = \frac{7,23 \cdot 10^{-6} (Ri Re)^2}{7,23 \cdot 10^{-6} (Ri Re)^2 + 1} \quad (20)$$

Le domaine de variation de  $K_d$  est  $[0, 1]$ . Nous pouvons donc considérer qu'il y a convection forcée si la dissipation de flottabilité est inférieure à 5% de la dissipation totale (soit  $K_d < 0,05$ ), et convection naturelle si elle représente plus de 95% de la dissipation totale ( $K_d > 0,95$ ).

On a d'après (20) :

$$Ri Re = \left[ \frac{1}{7,23 \cdot 10^{-6}} \frac{K_d}{1 - K_d} \right] \quad (21)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} K_d < 0,05 & \Rightarrow Ri Re < 85 \\ K_d > 0,95 & \Rightarrow Ri Re > 1621 \end{aligned}$$

La comparaison des valeurs obtenues pour  $RiRe$  montre que les deux options sont équivalentes. Par ailleurs, on constate que ces méthodes conduisent à des ordres de grandeur pour  $RiRe$  comparables à ceux qui ont été obtenus avec un critère basé sur les forces de frottement aux parois (resp. 15,2 et 5470) [13], ainsi qu'avec les critères  $P$  (resp. 8,3 et 506),  $\Gamma$  (resp. 8,3 et 3325) et particulièrement avec  $K_e$  (resp. 38 et 2318) [8].

## 5.2. Critères entropiques

Une autre façon d'aborder la question des critères de sélection serait de se baser sur la production d'entropie.

La première possibilité consiste à comparer, dans la relation (15), l'entropie de flottabilité (premier terme) et l'entropie de l'écoulement isotherme (second terme). On voit immédiatement que le rapport de ces deux termes est le paramètre  $\Gamma_d$  défini comme critère dissipatif. Les deux procédures sont donc rigoureusement équivalentes, et il n'est pas nécessaire de faire intervenir l'entropie dans cette approche.

La seconde possibilité consiste à rapporter l'entropie de flottabilité à la production totale d'entropie, en posant :

$$K_S = \frac{1}{1 + \frac{\frac{12 \mu V_d^2}{e T_m} + \frac{\lambda \left( \frac{\Delta T}{T_m} \right)^2}{e}}{1,39 \cdot 10^{-3} \frac{(\rho g \beta \Delta T)^2 e^3}{\mu T_m}}} \quad (22)$$

soit :

$$\frac{1}{K_S} = 1 + 8,63 \cdot 10^3 \frac{\mu^2 V_d^2}{(\rho g \beta \Delta T)^2 e^4} + \frac{1}{T_m} \frac{\lambda \mu}{1,39 \cdot 10^{-3} (\rho g \beta)^2 e^4} \quad (23)$$

Cette expression s'écrit aussi sous forme adimensionnée :

$$\frac{1}{K_S} = 1 + \frac{10^5}{(Ri Re)^2} \left[ 1,38 + 0,115 \frac{\Delta T}{T_m} \frac{1}{Br} \right] \quad (24)$$

où  $Br$  est le nombre de Brinkman ( $Br = \mu V_d^2 / \lambda \Delta T$ ).

Il est toujours possible de choisir des seuils tels que  $K_S = 0,05$  et  $K_S = 0,95$  comme cela a été fait pour  $K_d$ , mais cela conduirait à des relations peu commodes à manipuler. Il semble donc raisonnable d'écarter la notion de critère entropique pour caractériser les trois modes de convection.

## 6. Conclusion

Nous avons pu établir des expressions analytiques approchées de la dissipation et de la production d'entropie dans un écoulement établi de convection mixte, qui mettent en évidence l'influence de la poussée thermique. Elles montrent que la présence d'un terme de flottabilité entraîne toujours une augmentation de ces deux grandeurs, et qu'il existe une distance optimale entre les parois pour laquelle la production d'entropie est minimale. D'autre part, nous avons montré que la dissipation est une base satisfaisante pour établir des critères de sélection entre convection forcée, mixte et naturelle.

Il est encore prématuré de formuler une recommandation quant au choix du meilleur critère parmi ceux qui ont été proposés jusqu'ici, en particulier parce qu'il serait utile de vérifier leur pertinence en régime transitoire.

## NOMENCLATURE

$e$	distance de séparation entre les deux parois (fig.1), m
$V_d$	vitesse débitante de l'écoulement à l'entre des parois, m/s
$T_m$	température moyenne, K
$\beta$	coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$\Phi'''$	dissipation visqueuse locale, $Wm^{-3}$
$\Phi''$	dissipation visqueuse totale, $Wm^{-2}$
$\Phi^+$	dissipation visqueuse adimensionnée,
$\Gamma_d$	critère de sélection à base de dissipation (eq. 19)
$K_d$	critère de sélection à base de dissipation (eq. 21)
$K_s$	critère de sélection à base d'entropie (eq. 23)
$\sigma''$	production d'entropie, $Wm^{-2}K^{-1}$

### Souscrits

th	thermique
v	visqueuse
tot	total
opt	optimal

Note: tous les autres symboles sont ceux acceptés dans les journaux de profil.

## R É F É R E N C E S

- [1]. *P. Glansdorf, I. Prigogine*, Structure, stabilité et fluctuations. Masson, Paris (1971)
- [2]. *A. Bejan*, Entropy generation through heat and fluid flow. John Wiley (1994)
- [3]. *J. Herpe*, Caractérisation des performances des surfaces d'échange basée sur l'évaluation numérique du taux de production d'entropie. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, France (2007)
- [4]. *J. Herpe, S. Russeil, D. Bougeard*, Numerical analysis of louvered fin heat exchangers. 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Enhanced, compact and ultra-compact heat exchangers. Comm. CHE2007-0021, p.149-154. Postdam, Allemagne. (2007)
- [5]. *E.C. Mladin, M. Lachi, M. Rebay, J. Padet*, The entropy generation in transient thermal convection over a finite thickness plate, Congrès COFRET 06, Timisoara, Roumanie (2006)
- [6]. *D. Stanciu, M. Lachi, J. Padet, A. Dobrovicescu, M. Stoian*, Modélisation des irréversibilités volumiques de la convection forcée turbulente, Congrès Français de Thermique SFT 2005, Reims, Actes p.227-232 – Etude numérique des irréversibilités dans la convection forcée autour d'un réseau de tubes cylindriques, Actes p.233-238 (2005)
- [7]. *R. Ben Mansour, N. Galanis, C.T. Nguyen*, Production d'entropie en convection mixte. Congrès Français de Thermique SFT 05, Reims, Actes p.179-184 (2005)
- [8]. *J. Padet, R-M. Cotta, N.C. Chereches, N. El Wakil*, Internal mixed convection : criteria for transition from natural to forced regime (prescribed wall temperature), Congrès ENCIT 2004, ref. CIT 04-0841, Rio de Janeiro, Brésil (2004)

- [9]. *A. Barletta, F. Zanchini*, On the choice of the reference temperature for fully-developed mixed convection in a vertical channel. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 42, p.3169-3181 (1998)
- [10.]. *Y. Bayazitoglu, P.R. Paslay, P. Cernocky*, Laminar Bingham fluid flow between vertical parallel plates. *Int. J. Thermal Sciences*, 46, p.349-357 (2007)
- [11.]. *J. Padet, R-M Cotta, C. Chereches, V. Pavel*, Convection mixte établie dans une conduite annulaire. Communication proposée à COFRET 08 (2008)
- [12.]. *J. Padet, R-M. Cotta, N-C. Chereches, N. El Wakil*, Convection laminaire interne: critères de sélection pour distinguer les régimes de convection naturelle, mixte ou forcée. Congrès Français de Thermique SFT 05, Reims, Actes p.209-214 (2005)
- [13.]. *J. Padet*, Principes des transferts convectifs. Polytechnica, Paris (1997)