

## MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE POUTRE AVEC UNE FISSURE FINE

Dana Codruta VIŞAN<sup>1</sup>, Ioan PĂRĂUŞANU<sup>2</sup>

*From the point of view of the dynamic behaviour, the appearance of a breathing crack in a bar leads to the change of its natural frequencies. From the relationships, well known in the literature of speciality, that corresponds to the movement in the first natural mode of vibration of a simple supported beam, we chose a modelling with a single degree of freedom system. If there is a breathing crack in the beam, the elastic constant of the model is a time function which makes that the differential equation of the movement is of Mathieu type, the vibration being nonlineaire. In contrast to the numerical solutions of this type of equation, which are presented in the literature of specialty, and which does not take into account the damping factor, in this case there has been written a code, which is based on the Runge-Kutta integration method, but, in which there has been added a term corresponding to the damping forces. The influence of the parameters of the crack on the natural frequencies of the beam has been studied and diagrams have been drawn, in the future, they may be used for the identification of these parameters.*

*Du point de vue du comportement dynamique, l'apparition d'une fissure dans une poutre conduit au changement des fréquences naturelles de celle-ci. À partir des relations, bien connues de la littérature de spécialité, qui correspondent au mouvement dans le premier mode naturel de vibration d'une poutre simplement appuyée, on a choisi un système de modélisation avec un seul degré de liberté. Au cas où dans la poutre il y a une fissure fine, la constante élastique du modèle est une fonction de temps et l'équation différentielle du mouvement est de type Mathieu, la vibration étant nonlinéaire. À la différence des solutions numériques de ce type d'équation, qui sont présentées dans la littérature de spécialité, et qui ne tiennent pas compte de l'amortissement du système aussi, dans ce cas on a écrit un logiciel, qui a à la base la méthode d'intégration de Runge-Kutta, mais où on a ajouté le terme correspondant aux forces d'amortissement. On a étudié l'influence des paramètres de la fissure sur les fréquences naturelles de la poutre et on a tracé des diagrammes qui, à l'avenir, pourraient être utilisés pour l'identification de ces paramètres.*

**Mots-clés:** fréquences naturelles, poutre fissurée, équation Mathieu

---

<sup>1</sup> Lect., Depart. of Strength Materials, University POLITEHNICA of Bucharest, Romania, e-mail: danacodruta@gmail.com

<sup>2</sup> Prof., Depart. of Strength Materials, University POLITEHNICA of Bucharest, Romania, e-mail: ioan.parausantu@upb.ro

## 1. Introduction

La réponse dynamique d'une structure, les fréquences naturelles et les formes des modes naturels des vibrations, dépendent de la manière dont on répartit les masses, les rigidités et les amortissements le long de la structure. La présence d'une fissure, qui peut se produire suite à une sollicitation à la fatigue, conduisant à l'apparition des vibrations non-linéaires dans le comportement dynamique de la structure. Pendant le mouvement de vibration, la rigidité de la zone de la fissure se modifie en permanence au fil du temps, le niveau de la non-linéarité est sensible aux changements des paramètres de la fissure, l'emplacement et la profondeur. Dans la littérature de spécialité, le problème du comportement dynamique d'une poutre fissurée a été résolu tant par sa simplification et le traitement dans le domaine linéaire [1-4], que par une approche non-linéaire [6]. Il y a eu des solutions moyennes, dans lesquelles, à l'aide de la méthode des éléments finis, on a mis en place une matrice de rigidité supplémentaire dans la zone de la fissure, qui modélisait les deux positions extrêmes de celle-ci: complètement ouverte ou complètement fermée, son influence se produisant à chaque moitié de la période du mouvement de vibration [7]. Une bonne modélisation détaillée de la zone fissurée a été faite par Dimarogonas [17, 18]. Les idées présentées dans son travail, ont contribué à la réalisation du modèle proposé, un modèle dynamique avec un seul degré de liberté, dont la rigidité varie harmoniquement dans le temps. L'équation du mouvement qui en résulte est de type Mathieu et elle a été résolue numériquement en fonction du temps, par la méthode de Runge-Kutta.

## 2. Modèle mathématique d'une poutre fissurée simplement appuyée

La poutre simplement appuyée de la Figure 1, avec la longueur  $L$  et la section  $b \times h$ , présente une fissure, avec la profondeur  $a$  à la distance  $L_0$ . Notant avec  $U$  l'énergie spécifique de déformation et tenant compte du théorème de Castigliano, ainsi que du fait que la rotation  $\varphi$  de la section, dans la zone de la fissure, est directement proportionnelle avec le moment de flexion, il en résulte:

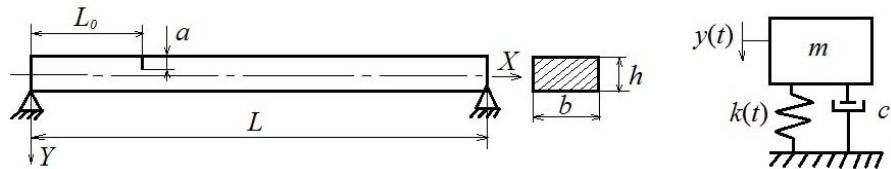


Fig. 1. La poutre fissurée et son modèle.

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} \quad (1)$$

L'énergie spécifique de déformation causée par la fissure, a la forme [8]:

$$U = \int_0^a \frac{\partial U}{\partial a} da = b \int_0^a J dh \quad (2)$$

où  $J$  représente l'énergie spécifique de déformation repartie à la hauteur de la fissure et elle est obtenue par la formule suivante:

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 \quad (3)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont le module de Young et le coefficient de Poisson. Compte tenant de l'état plane des contraintes, le facteur  $K$  est donné par la relation [8]:

$$K = \sigma \cdot F(\alpha) \cdot \sqrt{\pi a} \quad (4)$$

où la contrainte  $\sigma$  est:

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} \quad (5)$$

et  $F(\alpha)$  est une fonction sans dimension [8], exprimée en fonction du rapport  $\alpha=a/h$ :

$$F(\alpha) = 1.12 - 1.4\alpha + 7.33\alpha^2 - 13.1\alpha^3 + 14\alpha^4 \quad (6)$$

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (2) et en intégrant de 0 à  $a$ , nous obtenons :

$$U = \frac{36\pi(1-\nu^2)}{E} \frac{M^2}{bh^2} g(\alpha) \quad (7)$$

où

$$g(\alpha) = 0.6272\alpha^2 - 1.04533\alpha^3 + 4.5948\alpha^4 - 9.9736\alpha^5 + 20.2948\alpha^6 - 33.0351\alpha^7 + 47.1063\alpha^8 - 40.7556\alpha^9 + 19.6\alpha^{10} \quad (8)$$

En revanche, la variation de l'élasticité de la poutre simplement appuyée, à la raison de l'existence de la fissure, peut être obtenue de l'équation de Dimarogonas et Paipatis [9] :

$$\Delta C = \frac{18\pi L_0^2(1-\nu^2)}{Ebh^2} g(\alpha) \quad (9)$$

Considérant que la vibration de la poutre de la Figure 1 a lieu dans le premier mode naturel de vibrations, elle peut être modélisée comme celle de la Figure 1, sous la forme d'un système avec un seul degré de liberté. C'est parce que la rigidité du bar varie harmoniquement pendant la vibration, se situant entre deux valeurs extrêmes: correspondant à la position fermée de la fissure et l'autre à la position ouverte, que le modèle obtenu a un comportement non-linéaire. Compte tenant de la forme déformée de la poutre dans le premier mode naturel de vibration, l'équation (10),

$$Y(x) = \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \quad (10)$$

on peut obtenir la masse et la rigidité équivalentes au système initial [10], pour qu'après elles soient utilisées dans le modèle:

$$m = \int_0^L m(x) \cdot Y^2(x) \cdot dx = 0.5 \bar{m}L \quad (11)$$

où  $\bar{m}$  est la masse de la poutre par unité de longueur.

La rigidité équivalente, qui correspond à la position où la fissure est complètement fermée, est calculée en utilisant la relation:

$$k_f = \frac{1}{C} = \int_0^L EI \cdot (Y''(x))^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} \quad (12)$$

où  $EI$  est la rigidité en flexion de la poutre et  $C$  représente l'élasticité équivalente. De même, lorsque la fissure est complètement ouverte, la rigidité équivalente est  $k_o = 1/C_o$ , où  $C_o$  représente l'élasticité équivalente correspondant à cette position:

$$C_o = C + \Delta C \quad (13)$$

La rigidité équivalente du système avec un seul degré de liberté varie périodiquement dans le temps, entre les deux valeurs extrêmes  $k_f$  et  $k_o$ , sous la forme:

$$k(t) = k_o + k_\Delta [1 + \cos(\omega t)] \quad (14)$$

où  $k_\Delta$  est l'amplitude de la variation harmonique de la rigidité:

$$k_\Delta = \frac{1}{2} (k_f - k_o) \quad (15)$$

Par conséquent, de l'équation ci-dessus résulte que la rigidité correspondante à la position de l'équilibre est égale à la moyenne arithmétique des deux rigidités, l'une correspondante à la position dans laquelle la fissure est fermée et l'autre quand elle est ouverte. Ainsi, le mouvement harmonique, effectué d'un côté et de l'autre de la position de l'équilibre, peut être considéré comme étant effectué avec la vitesse angulaire  $\omega$ , dont la valeur est entre les valeurs  $\omega_f$  et  $\omega_o$ , valeurs correspondantes aux positions complètement fermée et respectivement totalement ouverte:

$$\omega = \frac{2\omega_f \omega_o}{\omega_f + \omega_o} \quad (16)$$

Notant avec  $c$  le coefficient équivalent d'amortissement du système avec un seul degré de liberté et tenant compte des paramètres concentrés, la masse équivalente et la rigidité équivalente, qui est une fonction du temps, l'équation du mouvement du système, illustré à la Figure 1, est:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \{k_o + k_\Delta [1 + \cos(\omega t)]\}y = 0 \quad (17)$$

On préfère une forme sans dimension pour l'équation (17). Pour réaliser cela, on fait le suivant changement de variable:

$$\omega t = 2z \quad (18)$$

d'où

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{\omega}{2} \frac{dy}{dz} \\ \ddot{y} &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\omega^2}{4} \frac{d^2y}{dz^2}\end{aligned}\quad (19)$$

En remplaçant les relations (18) et (19) dans l'équation (17) on obtiendra:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 4\zeta \frac{dy}{dz} + [a + 2q \cos(2z)]y = 0 \quad (20)$$

où

$$a = \frac{4(k_d + k_\Delta)}{m\omega^2}; \quad q = \frac{2k_\Delta}{m\omega^2}; \quad \zeta = \frac{c}{c_{cr}} \quad (21)$$

et  $\zeta$  représente la fraction de l'amortissement critique du système, correspondant à la relation (16).

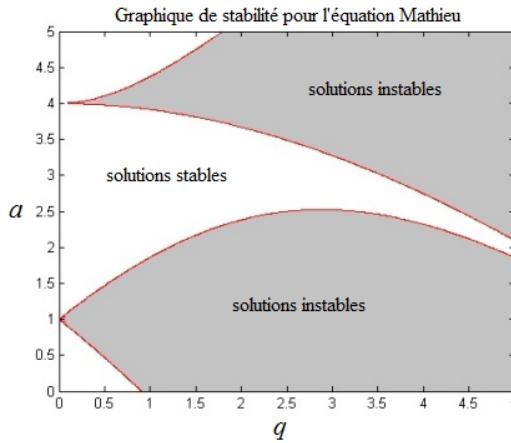


Fig. 2. Graphique de stabilité.

L'équation différentielle (20) est de type Mathieu. Ce type d'équations est souvent rencontré dans de différents domaines de la physique et de l'ingénierie. Certains problèmes de la physique théorique conduisent à des équations Mathieu, en particulier la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu ayant une structure périodique, le mouvement des électrons dans un réseau cristallin etc.

En fonction des valeurs des paramètres sans dimension  $a$  et  $q$ , les solutions de l'équation (20) peuvent être stables ou instables (fig. 2) [11].

### 3. Simulation numérique

Pour étudier l'effet de la profondeur de la fissure et de la position qu'elle occupe le long de la poutre sur la fréquence naturelle, on a considéré une poutre en acier avec une longueur de 1 m et  $30 \times 12 \text{ mm}^2$  en section. On considère trois positions de la fissure le long de la barre, à une distance de 0.15 m, 0.35 m et respectivement 0.5 m par rapport à l'appui de gauche. Pour chaque position on a calculé les fréquences naturelles, correspondant à trois profondeurs de la fissure: 3 mm, 6 mm et 9 mm. Le module d'élasticité du matériel est 210 GPa, le coefficient de Poisson 0.3 et la densité 7850 Kg/m<sup>3</sup>. La solution de l'équation (20) a été obtenue numériquement, à l'aide des fonctions MATLAB. On a choisi les conditions initiales suivantes:  $y = 1 \text{ mm}$  pour le déplacement et  $\dot{y} = 0$  pour la vitesse.

Les graphiques obtenus sont déplacement-temps et, dans l'espace des phases, vitesse-déplacement. Il n'y a qu'une partie des graphiques obtenus qui sont présentés dans le document, conformément au Tableau 1.

Tableau 1

Les paramètres analysés					
$L_0/L$	$a/h$	$\zeta$	$a$	$q$	Figure
0.35	0.5	0	4.0023	0.0550	Fig. 3
		0.0025			Fig. 4
		0.0375			Fig. 5
		0.2250			Fig. 6
	0.75	0	4.0503	0.2603	Fig. 7
	0.5	0	4.1689	0.4823	Fig. 8
		0.0025			Fig. 9

Pour  $a/h = 0.5$ , les figures 3 à 6, le mouvement du système est stable et il est amorti d'autant plus rapidement que  $\zeta$  est plus grand (des valeurs dans la plage comprise entre 0 et 0.225). Mais, si le rapport  $a/h = 0.75$ , les valeurs de  $a$  et  $q$  sont dans le voisinage de la zone d'instabilité des solutions de l'équation (20), le mouvement devenant apériodique, Fig. 7-9, avec une variation de l'amplitude pareille à celle du phénomène de battement, un phénomène rencontré quand la fréquence d'une force perturbatrice a des valeurs proches de celles de la fréquence naturelle du système. Cette situation correspond à la réalité, si vous n'oubliez pas que la valeur relativement élevée du rapport  $a/h$  est antérieure à la casse du matériel dans cette section.

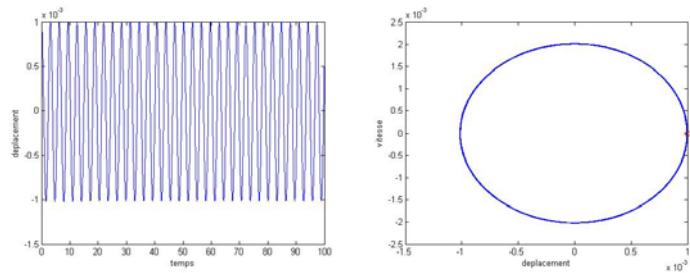


Fig.3. Conformément au Tableau 1.

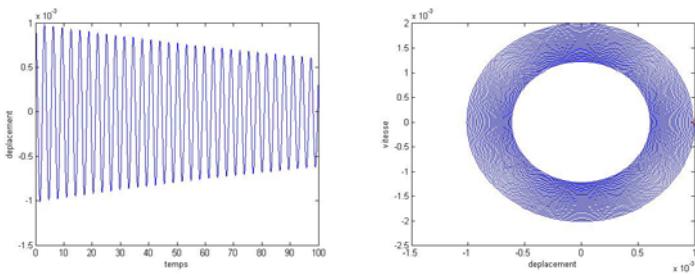


Fig.4. Conformément au Tableau 1.

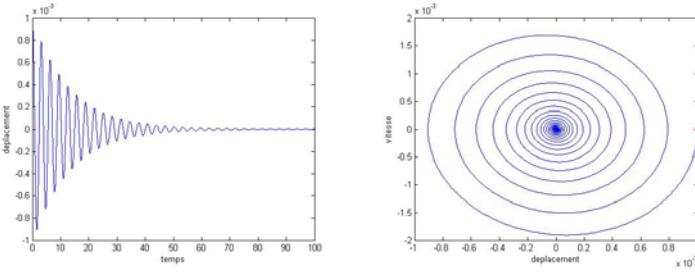


Fig.5. Conformément au Tableau 1.

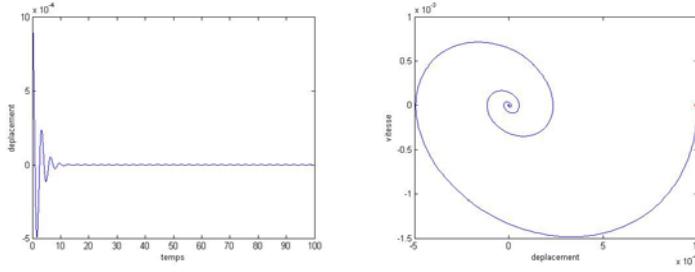


Fig.6. Conformément au Tableau 1.

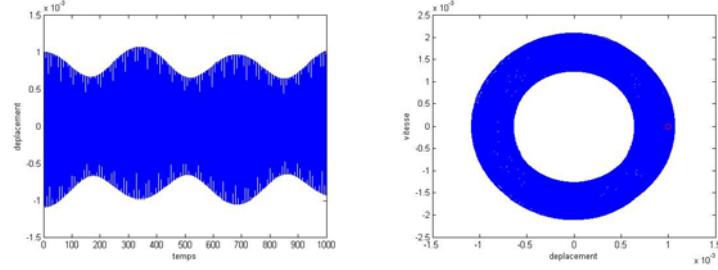


Fig.7. Conformément au Tableau 1.

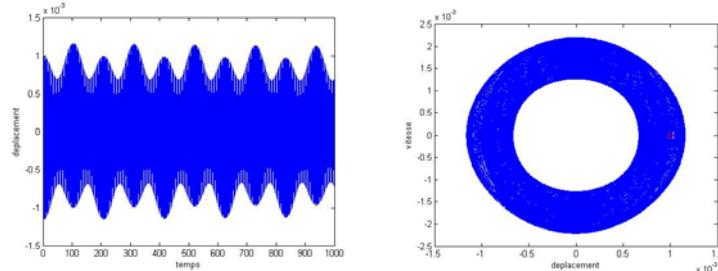


Fig.8. Conformément au Tableau 1.

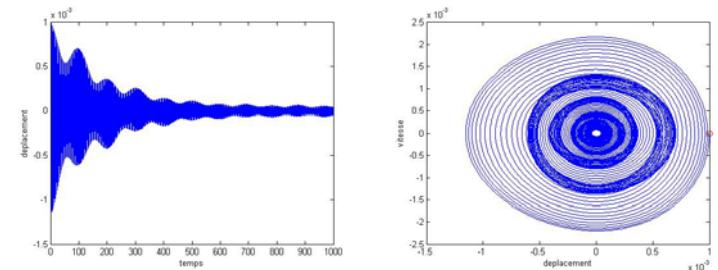


Fig.9. Conformément au Tableau 1.

Notant avec  $f_f$  la fréquence naturelle de la poutre fissurée et avec  $f$  la fréquence naturelle de la poutre sans fissure, dans la Figure 10 on représente la variation de la fréquence relative, le rapport  $f_f/f$  en fonction de la position de la fissure dans la poutre, du rapport  $L_0/L$  et de la profondeur de la fissure, le rapport  $a/h$ . Les valeurs de la fréquence naturelle de la poutre fissurée sont toujours inférieures à celles de la poutre sans fissure et elles sont d'autant plus petites que la profondeur de la fissure est plus grande et/ou la position de la fissure est plus proche du milieu de la barre.

#### 4. Conclusions

À partir des relations existantes dans la littérature de spécialité, on a construit un modèle d'une poutre simple appuyée, qui a une fissure pour laquelle

les paramètres sont connus. Les vibrations libres de ce modèle, sont des vibrations non-linéaires par suite du changement dans le temps de la constante élastique, qui varie entre deux valeurs: l'une correspondante à la position de déformation de la barre, la situation où la fissure est ouverte et l'autre position où la fissure est fermée et qui correspond à la situation dans laquelle la barre n'est pas fissurée. Le modèle mathématique a conduit à l'apparition d'une équation de type Mathieu, dans laquelle on a introduit aussi l'amortissement existant dans le système. On a résolu cette équation par une méthode numérique, à l'aide de l'intégration de Runge-Kutta et en utilisant deux conditions initiales  $y = 1$  et  $\dot{y} = 0$ .

Il faut mentionner que, dans la littérature de spécialité, ce type d'équation a des solutions numériques seulement pour le cas où il n'y a pas d'amortissement dans le système,  $\zeta = 0$  dans l'équation (20) [12,13]. Le programme écrit dans MATLAB [14] peut tenir compte de l'amortissement du système aussi, son effet sur le système pouvant ainsi être étudié.

Les résultats de la simulation numérique, obtenus en exécutant le logiciel écrit, ont mis en évidence des variations des fréquences naturelles de la poutre fissurée par rapport à celles de la poutre sans fissure. Ces variations sont d'autant plus grandes que la profondeur de la fissure est plus grande et elle est placée plus près du milieu de la barre.

La connaissance pour un système des diagrammes comme celles présentées dans la Figure 10, des diagrammes obtenues par une simulation numérique sur un modèle mathématique validé (telle que celle illustrée dans cet article), peut servir à identifier les paramètres inconnus d'une fissure, dans une situation réelle dans laquelle on a fait des déterminations expérimentales et on a obtenu les fréquences naturelles du système fissuré. Celui-ci est le prochain objectif de la recherche, constituant le prolongement de celles qui sont décrites ci-dessus.

## B I B L I O G R A P H I E

- [1] *T.G.Chondros*, "The continuous crack flexibility method for crack identification", *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2001, 24, pp. 643-650
- [2] *J.A. Loya and L.R.J. Fernández-Sa'ez*, "Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams", *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 290, pp. 640-653
- [3] *H.F. Lam, C.T. Ng and M. Veidt*, "Experimental characterization of multiple cracks in a cantilever beam utilizing transient vibration data following a probabilistic approach", *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 305, pp. 34-49
- [4] *B. Faverjon and J. Sinou*, "Identification of an open crack in a beam using an a posteriori error estimator of the frequency response functions with noisy measurements", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2009, 28, pp. 75-85
- [5] *M.I. Friswell and J.E.T. Penny*, "A simple nonlinear model of a cracked beam", In: *Proceedings 10th international modal analysis conference*, San Diego, CA, 1992, pp. 516-521

- [6] *M. Kisa and J. Brandon*, "The effects of closure of cracks on the dynamics of a cracked cantilever beam", Journal of Sound and Vibration, 2000, 238(1), pp. 1-18
- [7] *A.D. Dimarogonas*, "Vibration of cracked structures: a state of the art review", Engineering Fracture Mechanics, 1996, 55, pp. 831-857
- [8] *T.G. Chondros and A.D. Dimarogonas*, "A continuous cracked beam vibration theory", Journal of Sound and Vibration, 1998, 215(1), pp. 17-34
- [9] *A.D. Dimarogonas and S.A. Paipetis*, "Analytical Methods in Rotor Dynamics", London: Elsevier Applied Science, 1986
- [10] *L. Meirovitch*, Analytical Methods in Vibrations, The Macmillan Company, 1967
- [11] *T. Funada, J. Wang, D.D. Joseph, N. Tashiro and Y. Sonoda*, "Solution of Mathieu's equation by Runge-Kutta integration", Department of Aerospace Engineering and Mechanics, University of Minnesota, 110 Union St. SE, Minneapolis, MN 55455, USA
- [12] *E. Douka, S. Loutridis and A. Trochidis*, "Crack identification in beams using wavelet analysis", International Journal of Solids and Structures, 40 (2003), pp. 3557-3569
- [13] *R. Coisson, G. Vernizzi, X. Yang*, "Mathieu Functions and Numerical Solutions of the Mathieu Equation", Department of Materials Science and Engineering, Northwestern University, 2220 Campus Drive, Evanston IL 60208, USA
- [14] \*\*\* MATLAB Reference Guide. Springer, 2010